■ مسئله اول: آنتروپی فانو به شکل زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{F}(\rho) = -\log[Tr(\rho^2)]. \quad (۱)$$

نشان دهید که (15 نمره)

$$S(\rho) \geq \mathcal{F}(\rho). \quad (۲)$$

ب) مقدار بیشینه و کمینه آنتروپی فانو را بدست آورید. (5 نمره)

Solution: a) $f(x) = \log x$ is a convex function, that is:

$$\log\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \geq \sum_i \lambda_i \log x_i \quad \text{where} \sum_i \lambda_i = 1$$

So take $\lambda_i = P_i$ & $x_i = P_i$ $\longrightarrow$ $\log\left(\sum_i P_i^2\right) \geq \sum_i P_i \log P_i$ or

$$-F(\rho) \geq -S(\rho) \longrightarrow S(\rho) \geq F(\rho).$$

b) Due to convexity of $F(\rho) \longrightarrow$

$$F_{max} = F\left(\frac{I}{d}\right) = \log d$$

$$F_{min} = F(\text{pure state}) = 0.$$

■ مسئله دوم: (۳۰ نمره) الف: ثابت کنید که در هر کانال کوانتومی، آن حالت ورودی ای که آنتروپی حالت خروجی را می نیمم می کند، یک حالت خالص است.

ب: یک کانال پاوولی متقارن به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1 - 2P_0 - P_1)\,\rho + P_0 X\rho X + P_1 Y\rho Y + P_0 Z\rho Z, \tag{۳}$$

که در آن X, Y, Z ماتریس های پاوولی هستند. نشان دهید که این کانال دارای خاصیت هموردایی زیر است:

$$\mathcal{E}(U\rho U^\dagger) = U\mathcal{E}(\rho)U^\dagger \tag{۴}$$

که در آن $U = e^{i\theta Y}$ یک عملگر دوران به اندازه زاویه دلخواه حول محور z است.

از میان تمام حالت های خالص ورودی ، حالتی را پیدا کنید که آنتروپی حالت خروجی این کانال را کمینه کند.

a) Assume that the minimum output entropy state is mixed. Call it ρ_0. $\rightarrow$ $\rho_0 = \sum_i \lambda_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ $\rightarrow$

$$S(\mathcal{E}(\rho_0)) = S\Big(\mathcal{E}\big(\textstyle\sum_i \lambda_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\big)\Big) = S\Big(\textstyle\sum_i \lambda_i \mathcal{E}(|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|)\Big)$$

Since S is concave $\rightarrow$ $S(\mathcal{E}(\rho_0)) \geq \sum_i \lambda_i S(\mathcal{E}(|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|))$

$\geq S(\mathcal{E}(|\varphi_{min}\rangle\langle\varphi_{min}|))$ where $|\varphi_{min}\rangle$ is the state with the smallest value of output entropy.

b) proof of covariance: We want to show that $\mathcal{E}(U\rho U^\dagger) = U\mathcal{E}(\rho)U^\dagger$

or $\mathcal{U}^\dagger \mathcal{E}(\mathcal{U}\rho\mathcal{U}^\dagger)\mathcal{U} = \mathcal{E}(\rho)$. For any channel this means that:

$$\sum_i (\mathcal{U}^\dagger A_i \mathcal{U})\rho(\mathcal{U}^\dagger A_i^\dagger \mathcal{U}^\dagger) = \sum_i A_i \rho A_i^\dagger$$ therefore we should

show that $\mathcal{U}^\dagger A_i \mathcal{U} = \Omega_{ij} A_j$ where Ω is a unitary.

But this is obvious: SINCE

WE KNOW THAT $e^{i\theta Y}$ is the operator of rotation around the y-axis:

$$e^{i\theta Y}\begin{pmatrix} I \\ X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} e^{-i\theta Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

---

c) Finding the minimum output entropy state: we have:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-2p_0-p_1)\rho + p_0(X\rho X + Z\rho Z) + p_1 Y\rho Y$$

Let $\rho = \frac{1}{2}(1+\hat{n}\cdot\sigma)$ where $\hat{n}$ is a unit vector.

$$\mathcal{E}: \frac{1}{2}(1+\hat{n}\cdot\vec{\sigma}) \longrightarrow \frac{1}{2}(1+\vec{r}\cdot\vec{\sigma})$$ where

$$(1-2P_0-P_1)\, n_x + P_0(-n_y - n_z) + P_1\, n_y .$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2P_0-P_1)n_x - P_1 n_x \\ (1-2P_0-P_1)\, n_y + (P_1-2P_0)n_y \\ (1-2P_0-P_1)\, n_z - P_1 n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2P_0-2P_1)\, n_x \\ (1-4P_0)\, n_y \\ (1-2P_0-2P_1)\, n_z \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow |\vec{r}|^2 = (1-2P_0-2P_1)^2 (n_x^2 + n_z^2) + (1-4P_0)^2 n_y^2$$

$$= (1-2P_0-2P_1)^2 (1-n_y^2) + (1-4P_0)^2 n_y^2$$

$$|\vec{r}|^2 = (1-2P_0-2P_1)^2 + \left[(1-4P_0)^2 - (1-2P_0-2P_1)^2 \right] n_y^2$$

MINIMUM ENTROPY $\equiv$ MAXIMUM $|\vec{r}|^2$ (More pure state). thus.

if $1-4P_0 > 1-2P_0-2P_1 \longrightarrow n_y = \pm 1$

OR

if $1-4P_0 \leq 1-2P_0-2P_1 \longrightarrow n_y = 0.$

if $P_0 < P_1 \longrightarrow n_y = \pm 1 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ & $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

if $P_0 \geq P_1 \longrightarrow n_y = 0. \Longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \end{pmatrix}$

■ مسئله سوم: آنتروپی های $S(A),\ S(B),\ S(A,B)$ را برای حالت ورنر **۱۵ نمره**

$$\rho_W = \frac{p}{4} I \otimes I + (1-p)|\psi^-\rangle\langle\psi^-| \tag{۴}$$

حساب کنید و تعیین کنید که به ازای کدام مقدار از پارامتر p هر کدام از تساوی های زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} S(A,B) &= S(A) + S(B), \\ S(A,B) &= |S(A) - S(B)|. \end{aligned} \tag{۵}$$

$$\rho_{AB} = \frac{p}{4}\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{vmatrix} + \frac{(1-p)}{2}\begin{vmatrix} & & & \\ & 1 & -1 & \\ & -1 & 1 & \\ & & & \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \rho_{AB} = \begin{vmatrix} p/4 & & & \\ & \frac{1}{2}-\frac{p}{4} & \frac{p-1}{2} & \\ & \frac{p-1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{p}{4} & \\ & & & p/4 \end{vmatrix} \rightarrow \lambda = \left\{\frac{p}{4}, \frac{p}{4}, \frac{p}{4}, 1-\frac{3p}{4}\right\}.$$

$$\rightarrow \boxed{S_{AB} = -\left(\frac{3p}{4}\log\frac{p}{4} + \left(1-\frac{3p}{4}\right)\log\left(1-\frac{3p}{4}\right)\right)}$$

$$\rho_A = \frac{p}{2} I + (1-p)\frac{I}{2} = \frac{I}{2} \qquad \rho_B = \frac{I}{2}.$$

b) So we require that $S_{AB} = 1+1=2$ this is possible for $p=1$

c) this is possible. For $p=0$

■ مسئله چهارم: (۳۵ نمره) مدل آبلی کیتایف را برای کیوبیت ها در نظر بگیرید که روی یک شبکه دارای $2N$ تا ضلع تعریف می شود. شبکه دارای شرایط مرزی پریودیک است. حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$|\tilde{\Omega}\rangle := |0\rangle^{2N} \tag{۷}$$

الف: حال با اثر دادن عملگرهای مناسب روی این حالت سعی کنید یک حالت پایه از سیستم بسازید.

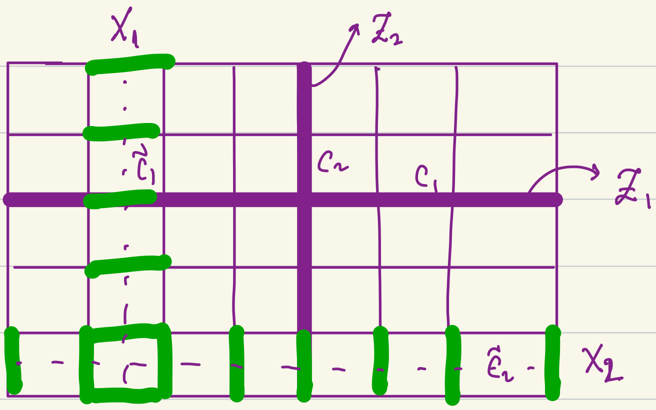
ب: سپس با اعمال عملگرهای توپولوژیک مناسب چهار حالت پایه واگن بسازید.

پ: این حالت های پایه چه ربطی به حالت های پایه ای که قبلا پیدا کردیم دارند؟

ت: اگر این حالت ها را به صورت کیوبیت های منطقی در نظر بگیریم، اثر عملگرهای منطقی X_i و Z_i را روی آنها پیدا کنید.

$$|\tilde{\Omega}\rangle = |0\rangle^{2N} \qquad B_p|\tilde{\Omega}\rangle = |\tilde{\Omega}\rangle$$

$$|\phi\rangle := \prod_s (I + A_s)|\tilde{\Omega}\rangle \longrightarrow A_s|\phi\rangle = B_p|\phi\rangle = |\phi\rangle$$



$$\mathcal{Z}_1 = \prod_{i\in C_1} Z_i \qquad \mathcal{Z}_2 = \prod_{i\in C_2} Z_i \qquad [Z_1, Z_2] = 0.$$

$$X_1 = \prod_{i \in \tilde{C}_1} X_i \qquad X_2 = \prod_{i \in \tilde{C}_2} X_i \qquad [X_1, X_2] = 0$$

$$X_i Z_i = -Z_i X_i \qquad X_i Z_j = Z_j X_i \quad (i \neq j).$$

the four ground states are:

$$|\varphi_{00}\rangle = |\tilde{\Omega}\rangle$$
$$|\varphi_{01}\rangle = Z_1 |\tilde{\Omega}\rangle$$
$$|\varphi_{10}\rangle = Z_2 |\tilde{\Omega}\rangle$$
$$|\varphi_{11}\rangle = Z_1 Z_2 |\tilde{\Omega}\rangle.$$

■ **مسئله پنجم:** (**۱۵** نمره)

اندازه درهم تنیدگی حالت زیر را حساب کنید:

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{p}{2}}|00\rangle + \sqrt{\frac{p}{2}}|01\rangle + \sqrt{\frac{1-p}{2}}|10\rangle - \sqrt{\frac{1-p}{2}}|11\rangle. \qquad (۸)$$

Solution: $|\psi\rangle = \sqrt{p}\,|0,+\rangle + \sqrt{1-p}\,|1,-\rangle$

$$\rightarrow \rho_A = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1| \longrightarrow E(|\psi\rangle) = S(\rho_A) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$$
